第一讲 因式分解与一元二次方程

因式分解是代数式的一种重要的恒等变形，它与整式乘法是相反方向的变形．在分式运算、解方程及各种恒等变形中起着重要的作用．是一种重要的基本技能．

因式分解的方法较多，除了初中课本涉及到的提取公因式法和公式法(平方差公式和完全平方公式)外，还有公式法(立方和、立方差公式)、十字相乘法和分组分解法等等．

一、公式法(立方和、立方差公式)

我们在初中已经学习过了下列一些乘法公式:

（1）平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；

（2）完全平方公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ ．

我们还可以通过证明得到下列一些乘法公式:

（1）立方和公式 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$；

（2）立方差公式 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$；

（3）三数和平方公式 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$；

（4）两数和立方公式 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$；

（5）两数差立方公式 $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ ．

【例 1】分解因式：

(1) $3a^3b-81b^4$　　(2) a^7-ab^6

解：(1) $3a^3b-81b^4=3b(a^3-27b^3)=3b(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$ ．

(2) $a^7-ab^6=a(a^6-b^6)=a(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$=a(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=a(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

二、分组分解法

从前面可以看出，能够直接运用公式法分解的多项式，主要是二项式和三项式．而对于四项以上的多项式，如 $ma+mb+na+nb$ 既没有公式可用，也没有公因式可以提取．因此，可以先将多项式分组处理．这种利用分组来因式分解的方法叫做分组分解法．分组分解法的关键在于如何分组．

1．分组后能提取公因式

【例 2】把 $2ax-10ay+5by-bx$ 分解因式．

解：$2ax-10ay+5by-bx=2a(x-5y)-b(x-5y)=(x-5y)(2a-b)$

说明：用分组分解法，一定要想想分组后能否继续完成因式分解，由此合理选择分组的方法．本题也可以将一、四项为一组，二、三项为一组，同学不妨一试．

【练习】把 $ab(c^2-d^2)-(a^2-b^2)cd$ 分解因式．

解：$ab(c^2-d^2)-(a^2-b^2)cd=abc^2-abd^2-a^2cd+b^2cd$

$=(abc^2-a^2cd)+(b^2cd-abd^2)$

$=ac(bc-ad)+bd(bc-ad)=(bc-ad)(ac+bd)$

2．分组后能直接运用公式

【例 3】把 $x^2-y^2+ax+ay$ 分解因式．**解：**$x^2-y^2+ax+ay=(x+y)(x-y)+a(x+y)=(x+y)(x-y+a)$

【练习】把 $2x^2+4xy+2y^2-8z^2$ 分解因式．**解：**$2x^2+4xy+2y^2-8z^2=2(x^2+2xy+y^2-4z^2)$

$=2[(x+y)^2-(2z)^2]=2(x+y+2z)(x+y-2z)$

三、十字相乘法

大家知道，$(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)=a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2$．

反过来，就得到：$a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$

我们发现，二次项系数 a 分解成 a_1a_2，常数项 c 分解成 c_1c_2，把 a_1,a_2,c_1,c_2 写成 $\begin{matrix}a_1 & & c_1\\ & \times & \\ a_2 & & c_2\end{matrix}$，这里按斜线交叉相乘，再相加，就得到 $a_1c_2+a_2c_1$，如果它正好等于 ax^2+bx+c 的一次项系数 b，那么 ax^2+bx+c 就可以分解成 $(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$，其中 a_1,c_1 位于上一行，a_2,c_2 位于下一行．

这种借助画十字交叉线分解系数，从而将二次三项式分解因式的方法，叫做十字相乘法．

必须注意，分解因数及十字相乘都有多种可能情况，所以往往要经过多次尝试，才能确定一个二次三项式能否用十字相乘法分解．

【例 4】把下列各式因式分解：

(1) x^2-7x+6　　(2) $x^2+13x+36$　　(3) $12x^2-5x-2$

解(1)：$\because\ 6=(-1)\times(-6),(-1)+(-6)=-7\ \therefore\ x^2-7x+6=[x+(-1)][x+(-6)]=(x-1)(x-6)$

解(2)：$\because\ 36=4\times9,4+9=13\ \ \therefore\ x^2+13x+36=(x+4)(x+9)$

解(3)： $12x^2-5x-2=(3x-2)(4x+1)$

(4) $x^2+xy-6y^2$　　(5) $5x^2+6xy-8y^2$　　(6) $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$

解(4)： $x^2+xy-6y^2=x^2+yx-6^2=(x+3y)(x-2y)$

解(5)： $5x^2+6xy-8y^2=(x+2y)(5x-4y)$

解(6)： $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=(x^2+x-6)(x^2+x-2)$

$=(x+3)(x-2)(x+2)(x-1)$

四、拆、添项法

【例 5】分解因式 x^3-3x^2+4

分析：此多项式显然不能直接提取公因式或运用公式，分组也不易进行．细查式中无一次项，如果它能分解成几个因式的积，那么进行乘法运算时，必是把一次项系数合并为 0 了，考虑通过添项或拆项解决．

解： $x^3-3x^2+4=(x^3+1)-(3x^2-3)$

$=(x+1)(x^2-x+1)-3(x+1)(x-1)=(x+1)[(x^2-x+1)-3(x-1)]$

$=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2$

说明：本解法把原常数 4 拆成 1 与 3 的和，将多项式分成两组，满足系数对应成比例，造成可以用公式法及提取公因式的条件．本题还可以将 $-3x^2$ 拆成 x^2-4y^2，将多项式分成两组 (x^3+x^2) 和 $-4x^2+4$ ．

五、一元二次方程的根与系数的关系

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 的两个根为：$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

所以：$x_1+x_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\dfrac{b}{a}$，

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{(2a)^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

定理：如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的两个根为 x_1,x_2，那么：

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},x_1x_2=\frac{c}{a}$$

说明：一元二次方程根与系数的关系由十六世纪的法国数学家韦达发现，所以通常把此定理称为"韦达定理". 上述定理成立的前提是 $\Delta\geq 0$.

【例 6】若 x_1,x_2 是方程 $x^2+2x-2007=0$ 的两个根，试求下列各式的值:

（1） ${x_1}^2+{x_2}^2$；（2） $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$；（3） $(x_1-5)(x_2-5)$；（4） $|x_1-x_2|$.

分析：本题若直接用求根公式求出方程的两根，再代入求值，将会出现复杂的计算 . 这里，可以利用韦达定理来解答 .

解：由题意，根据根与系数的关系得： $x_1+x_2=-2,x_1x_2=-2007$

（1） ${x_1}^2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-2)^2-2(-2007)=4018$

（2） $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-2}{-2007}=\frac{2}{2007}$

（3） $(x_1-5)(x_2-5)=x_1x_2-5(x_1+x_2)+25=-2007-5(-2)+25=-1972$

（4） $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{(-2)^2-4(-2007)}=2\sqrt{2008}$

说明：利用根与系数的关系求值，要熟练掌握以下等式变形:

${x_1}^2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$， $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$， $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$，

$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$， $x_1{x_2}^2+{x_1}^2x_2=x_1x_2(x_1+x_2)$，

${x_1}^3+{x_2}^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$ 等等 . 韦达定理体现了整体思想 .

【例 7】已知关于 x 的方程 $x^2-(k+1)x+\frac{1}{4}k^2+1=0$，根据下列条件，分别求出 k 的值 .

（1）方程两实根的积为 5；（2）方程的两实根 x_1,x_2 满足 $|x_1|=x_2$.

分析：（1）由韦达定理即可求之；（2）有两种可能，一是 $x_1=x_2>0$，二是 $-x_1=x_2$，所以要分类讨论 .

解：（1）$\because$ 方程两实根的积为 5

$$\therefore\ \begin{cases}\Delta=[-(k+1)]^2-4(\frac{1}{4}k^2+1)\geq 0\\ x_1x_2=\frac{1}{4}k^2+1=5\end{cases}\Rightarrow k\geq\frac{3}{2},k=\pm 4$$

所以，当 $k=4$ 时，方程两实根的积为 5 .

（2）由 $|x_1|=x_2$ 得知:

①当 $x_1\geq 0$ 时， $x_1=x_2$，所以方程有两相等实数根，故 $\Delta=0\Rightarrow k=\frac{3}{2}$；

②当 $x_1<0$ 时， $-x_1=x_2\Rightarrow x_1+x_2=0\Rightarrow k+1=0\Rightarrow k=-1$，由于

$\Delta > 0 \Rightarrow k > \dfrac{3}{2}$，故 $k=-1$ 不合题意，舍去．

综上可得，$k=\dfrac{3}{2}$ 时，方程的两实根 x_1,x_2 满足 $|x_1|=x_2$．

说明：根据一元二次方程两实根满足的条件，求待定字母的值，务必要注意方程有两实根的条件，即所求的字母应满足 $\Delta \geq 0$．

【例 8】已知 x_1,x_2 是一元二次方程 $4kx^2-4kx+k+1=0$ 的两个实数根．

（1）是否存在实数 k，使 $(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=-\dfrac{3}{2}$ 成立？若存在，求出 k 的值；若不存在，请您说明理由．

（2）求使 $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}-2$ 的值为整数的实数 k 的整数值．

解：（1）假设存在实数 k，使 $(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=-\dfrac{3}{2}$ 成立．

$\because$ 一元二次方程 $4kx^2-4kx+k+1=0$ 的两个实数根

$$\therefore \begin{cases} 4k \neq 0 \\ \Delta=(-4k)^2-4\cdot 4k(k+1)=-16k \geq 0 \end{cases} \Rightarrow k<0,$$

又 x_1,x_2 是一元二次方程 $4kx^2-4kx+k+1=0$ 的两个实数根

$$\therefore \begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1x_2=\dfrac{k+1}{4k} \end{cases}$$

$$\therefore (2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=2({x_1}^2+{x_2}^2)-5x_1x_2=2(x_1+x_2)^2-9x_1x_2$$

$$=-\frac{k+9}{4k}=-\frac{3}{2} \Rightarrow k=\frac{9}{5}，但 k<0．$$

$\therefore$ 不存在实数 k，使 $(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=-\dfrac{3}{2}$ 成立．

（2）$\because \dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}-2=\dfrac{{x_1}^2+{x_2}^2}{x_1x_2}-2=\dfrac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}-4=\dfrac{4k}{k+1}-4=-\dfrac{4}{k+1}$

$\therefore$ 要使其值是整数，只需 $k+1$ 能被 4 整除，故 $k+1=\pm1,\pm2,\pm4$，注意到 $k<0$，

要使 $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}-2$ 的值为整数的实数 k 的整数值为 $-2,-3,-5$．

说明：（1）存在性问题的题型，通常是先假设存在，然后推导其值，若能求出，则说明存在，否则即不存在．

（2）本题综合性较强，要学会对 $\dfrac{4}{k+1}$ 为整数的分析方法．

练习题答案：

A　组

1．$(a+3)(a^2-3a+9),(2-m)(4+2m+m^2),(2-3x)(4+6x+9x^2),$

$-\frac{1}{64}(2p+q)(4p^2-2pq+q^2),(2xy-\frac{1}{5})(4x^2y^2+\frac{2}{5}xy+\frac{1}{25}),\frac{1}{216}(xy+2c)(x^2y^2-2xyc+4c^2)$

2．$x(x+y)(y^2-xy+x^2),x^n(x-y)(x^2+xy+y^2),$

$a^2(m+n-b)[(m+n)^2+b(m+n)+b^2],y^2(x-1)^2(x^4-4x^3+3x^2+2x+1)$

3．$(x-2)(x-1),(x+36)(x+1),(x+13)(x-2),(x-9)(x+3)$

$(x-9)(x+3),(m-5n)(m+n),(a-b+4)(a-b+7)$

4．$ax^3(x-2)(x-8),a^n(a+3b)(a-2b),(x-3)(x+1)(x^2-2x+3),(x-3)(x+3)(x^2+2)$

$(2x-3)(3x+1),(2x-y)(4x+15y),(7a+7b+2)(a+b-1),(2x+1)(3x-5)(6x^2-7x+5)$

5．$(x-y)(3a+y),(2x+1)^2(2x-1),(x-3)(5x+2y),(2a-5b-6)(2a-5b+6)$

$(1-2x+y)(1+2x-y),ab(a+b)^2(a-b),(x^3-1-y^3)(x^3-1+y^3),x(x-y)(x+y+1)$．

6．A　7．A　8．A　9．3　10．9或-3

11．(1)$\Delta=16m^2+5>0$　(2)$m=-\frac{1}{2}$

B组

1．$(bc+ad)(ac-bd),(x-4m+2n)(x-2n),(x^2-4x+8)(x^2+4x+8),$

$(x-1)(x-3)(x-7),(x-2y)^2(x+2y)$．

2．$\frac{28}{3}$

3．$n^5-5n^3+4n=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$

4．$a^3+a^2c+b^2c-abc+b^3=(a^2-ab+b^2)(a+b+c)$